

عرفنا الدالة الخطية لمجموعة A (حيث $A \subseteq E$) بالشكل:

$$T_A : E \rightarrow R$$

$$x \mapsto T_A(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in A \\ 1 & ; x \notin A \end{cases}$$

الشيء انه لدالة الخطية T_A تكون قياسية اذا كانت المجموعة A مفرقة

تعريف: الدالة البسيطة

$$P : E \rightarrow R \text{ بسيطة}$$

بقولنا ان الدالة

لذا كقوة مبدل

(١) مجموعة $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ مفرقة

(٢) P دالة خطية

(٣) $P(x) = a_i$ ، $x \in A_i$ ، $i = 1, 2, \dots, n$

ملاحظة

- يمكن كتابة الدالة البسيطة بالشكل

$$P(x) = \sum_{i=1}^n a_i T_{A_i}(x) , x \in E$$

بقولنا ان الدالة البسيطة

$$P(x) = \sum_{i=1}^n a_i T_{A_i}(x)$$

حيث ان $a_i \geq 0$ ، $i = 1, 2, \dots, n$

نلاحظ ايضا

ان الدالة البسيطة تكون قياسية اذا كانت المجموعة

A_1, A_2, \dots, A_n مفرقة

*** ملاحظات: العلاقات الجديدة على السؤال القياسي**

ملاحظة:

لتكن $(\varphi(x))$ و $(\psi(x))$ دوال معرفة على مجموعة E حيث

(١) الدالة $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ بسيطة من اجل كل ثابت c

(٢) السؤال $\varphi(x) \neq \psi(x)$ و $\varphi(x), \psi(x)$ دوال بسيطة

مبرهنة 2

لتكن $\{P_n\}$ متتالية من الدالات المتوالية على المجموعة E مقاربة نقطياً لـ $f(x)$ (حدوداً مبرهنة) عند تكون لـ $f(x)$ متوالية على E هالبا لـ $f(x)$ متوالية على E

$$P_n: E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f: E \rightarrow \mathbb{R}$$

وكذلك

مبرهنة 3

لتكن $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ دالة متوالية غير سالبة على E عندئذ يوجد متتالية $\{P_n\}$ من الدالات المقاربة نقطياً لـ $f(x)$ دالة كانت الدالة $f(x)$ فيمكنه المقاربة متتالياً

مبرهنة 4

نمبرهنة (4) على شكل متتالية $\{P_n\}$ بالشكل التالي:
نضع

$$E_n^k = E \left(\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n} \right); k = 0, 1, 2, \dots, n2^n - 1$$

$$= E \left(f \geq \frac{k}{2^n} \right) \cap E \left(f < \frac{k+1}{2^n} \right)$$

$$E_n = E \left(f > n \right)$$

ونكتب الدالة $e_n(x)$ بنموذجها

$$e_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} I_{E_n^k}(x) + n I_{E_n}(x)$$

حيث $n = 1, 2, \dots$

مبرهنة 5 إذا كانت $f(x)$ دالة متوالية (ليست بالضرورة سالبة) غير سالبة فيكون جزئها لـ $f(x)$ جزئياً

$$f^+(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(x))$$

الجزء الموجب :

$$f^-(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(x))$$

والجزء السالب :

وكذلك من $f^+(x)$ و $f^-(x)$ دالة قيموسية ديسالية
لذلك توجد مثالين من الدوال بسيطة ديسالية $f(x)$ $f^+(x)$
دعنا نأخذ

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) ; x \in E$$

فتكون الدالة $f(x)$ $f^+(x)$ $f^-(x)$ متقاربة من الدالة $f(x)$
والذي يعني أنه كدالة متوسمة تكون دالة متساوية للدوال
البسيطة .

* تلا من ليس

هناك العديد من الدوال ذات القيم الحدية غير المحددة
بمعانيه وأقرباً مثال ذلك دالة ديرحلية

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \\ 0 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \cap Q \\ 0 & x \in [0, 1] \cap Q^c \end{cases}$$

لا غير متوسمة ولا متساوية للدوال

لذا اقتضت الضرورة توسيع مفهوم التكامل ليصل إلى
الدوال غير المتوسمة والدوال غير ديرحلية (دالة ديرحلية مثلاً)
« وبناءً على ذلك ليصل إلى البسيطة »

تکامل لیسے کے سوالیہ حصہ

$$X \text{ is a } \mathbb{R}^n \text{ vector space } (p(x) = \sum_{i=1}^n a_i T_{A_i}(x)) \rightarrow \text{is a}$$

مسئله ۱: اگر A_1, A_2, \dots, A_n یک خانواده مستقل از مجموعه X باشد، آنگاه $\sigma(A_i)$ نیز مستقل است.

$$p(x) = a, \quad x \in A_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow E(p = a_i)$$

دستورالعمل: در هر دو خارج محو A (جزئیة X)
قاسم حدود ای W :

$$\varphi(A) = 0; \forall x \in A^c, \mu(A) < \infty$$

تعارف :

نسكن $p(r) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{T}{A_i}$ ، القابلة للمساواة

المجموعة X - دكتور مذكراته أنقأ
عبد الله بن خروف تكامل لسبع أشهر الدولة لم يطفء بالحد

$$\int_X f(x) d(\lambda) = \sum_{i=1}^n a_i / \mu(A_i)$$

وإذا كانت E مجموعة حتمية X فتكون S_X على E البنية اللاتية :

$$\int_E c_e(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{X^-} c_e(\mathbf{x}) \frac{T}{E}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

ملفوظات

إذا كان القياس المستعمل ذا كمال شرطي فإنه يكون $\phi(x) = 0$
خارج مجموعة ذات قياس صفر.

(5)

مثال 1

ليكن الدالة بسيطة $f: [1, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ بالشكل

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , 1 < x \leq 3 \\ 1 & , 3 < x \leq 5 \\ 8 & , 5 < x \leq 10 \\ 5 & , x \geq 10 \end{cases}$$

$$\int_{[1, 10]} f(x) d\mu$$

الحل

المحل

لتبسيط الدالة $f(x)$ هو

$$f(x) = 2 \cdot \mathbb{I}_{[1, 3]}(x) + 1 \cdot \mathbb{I}_{[3, 5]}(x) + 8 \cdot \mathbb{I}_{[5, 10]}(x) + 5 \cdot \mathbb{I}_{\{10\}}(x)$$

لذلك نجد

$$\int f(x) d\mu = 2 \cdot \mu([1, 3]) + 1 \cdot \mu([3, 5]) + 8 \cdot \mu([5, 10]) + 5 \cdot \mu(\{10\})$$

$$= 2 \cdot (2) + 1 \cdot (2) + 8 \cdot (5) + 5 \cdot (0) = 46$$

مثال 2

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

ليكن الدالة بسيطة

معطاه بالشكل

$$f(x) = 2 \cdot \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(x) + \mathbb{I}_{[0, 5[}(x) + 0 \cdot \mathbb{I}_{[5, \infty[}(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu$$

المحل

$$\int_R \psi(x) d(\lambda) = 2 \cdot \lambda([-\infty, 0[) + 1 \cdot \lambda([0, 5]) + 0 \cdot \lambda([5, \infty[)$$

$$= 2 \cdot \infty + 5(1) + 0 = \infty$$

فإذا كان $p(x)$ غير صفري R فإن $p(x)$ قابل القسمة على $q(x)$ في $R[x]$ (أي $p(x) = q(x)r(x)$ في $R[x]$)

* خواص و سعاد و نفع اللسان و لسانه

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot I_{A_i}(x) \quad \text{~K!~} \quad (1)$$

$$c_e(x) = \sum_{j=1}^m b_j T_{B_j}(x)$$

تحويل $p(x)$ إلى $p(x)$

$$\int_X c_p(x) d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \lambda(A_i) = \sum_{j=1}^m b_j \lambda(B_j)$$

هذا يعني انه قد استكمل ونقل عن طريقه تحصيل الحالة (٢٢)

(2) ادوات کاتے E_1, E_2, \dots, E_n مجموعاً ایک فیوچر صفیہ

$$M(E_v) < \infty, \quad v = 1, 2, \dots, n$$

Since $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ is linear
 $\int_E \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbb{I}_{E_i} \right) d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i)$

٢) علامه فقهانه بهدالة الميزة هي حالة عامه وخصه الدال اليه

$$\int_E I_A(x) d\mu = \mu(A)$$

(4) إذا كانت φ, ψ دوال بسيطة:

$$\int_E c \varphi(x) d\mu = c \int_E \varphi(x) d\mu \quad (P)$$

حيث c ثابت
(ب)

$$\int_E [\varphi(x) + \psi(x)] d\mu = \int_E \varphi(x) d\mu + \int_E \psi(x) d\mu$$

$$\int_E \varphi(x) d\mu \leq \int_E \psi(x) d\mu \quad \text{إذا كان } \varphi \leq \psi \quad \text{a.e.} \quad (A)$$

$$\int_E d\mu = \mu(E) \quad \text{إذا كانت } E \text{ مجموعة موجبة في } \mathcal{A} \quad (5)$$

* اعتماداً على تعريف الدوال البسيطة نجد تعريف الدوال القياسية الموجبة:

* تكملة ليسوع للدوال القياسية الموجبة

نفرض أن (X, \mathcal{F}, μ) فضاء مقياسي و $\mu(X) < \infty$

أنه $\mu(X) < \infty$

نفرض أنه دالة $P: X \rightarrow \mathbb{R}$ موجبة محدودة

هنا نعرف المجموعة $E(P) = \{x \in X : P(x) > 0\}$

كل أن:

$$|P(x)| < \infty, \quad \forall x \in X$$

تعريف: (1) دالة بسيطة:

$$(2) \int_X P(x) d\mu = \inf \left\{ \int_X \varphi(x) d\mu : \varphi \geq P, \varphi \text{ دالة بسيطة} \right\}$$

كل أن

تلك الدالة البسيطة φ على المجموعة X

(c) بسفي المقار

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \psi d\mu : \psi \leq f, \psi \text{ دالة بسيطة} \right\}$$

نلاحظ
أدنى

تكافؤ ليسج الأداة f على المجموعة X

(٣) نقول إنه إذا كانت f دالة بسيطة على المجموعة X إذا كانت

$$\int_X f d\mu = \int_X f d\mu$$

وهذه العبارة تكافؤ ليسج للأداة f على المجموعة X على المقاييس
درعزلا.

$$\int_X f d\mu = \int_X f d\mu$$

مبرهنة 1

إذا كانت $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ دالة بسيطة

$$\int_X f d\mu = \int_X f d\mu = \int_X f d\mu$$

مبرهنة 2

إذا كانت $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ دالة بسيطة

وإذا كانت $M(X) < \infty$ ، فإن تكافؤ ليسج f كدالة على X
إذا كانت f دالة بسيطة.

مثال 1

لكن $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة بسيطة

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

لكن f كدالة بسيطة ليسج على المجموعة $E = [0, 1]$

الحل:

لنبا $1 \leq f(x) \leq 2, \forall x \in [0,1]$ لذا
 في حالة $c < 0$ فمجموعة $E(f > c)$ هي:

$$E(f > c) = \begin{cases} [0,1] & ; c < 0 \\ [0,1] \cap Q & ; 0 \leq c < 1 \\ \emptyset & ; c \geq 1 \end{cases}$$

والجموعتان $E(f > 0)$ و $E(f > 1)$ هما مجموعتان
 متكاملتان، لذا:

$$\int_{[0,1]} f(x) dx = \int_{[0,1] \cap Q} f(x) dx + \int_{[0,1] \setminus Q} f(x) dx$$

$$= \int_{[0,1] \cap Q} 1 \cdot dx + \int_{[0,1] \setminus Q} 0 \cdot dx$$

$$\lambda([0,1] \cap Q) = 0 \quad \text{بشيء} \quad \lambda([0,1] \setminus Q) = 1$$

$$\therefore \int_{[0,1]} f(x) dx = 0 \quad \text{على أي حال، لأن } f(x) \text{ غير متكاملة في } [0,1]$$

دوال f متكاملة ليس بالضرورة أن تكون f دالة متصلة:

① لنكن $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة و μ مقياس على X بحيث $\mu(X) < \infty$ عندها:

$$\int_X c \cdot f(x) d\mu = c \int_X f(x) d\mu$$

$$\int_X [f(x) + g(x)] d\mu = \int_X f(x) d\mu + \int_X g(x) d\mu$$

$$\int_X f(x) d\mu = \int_X g(x) d\mu \quad \text{اگر } f \stackrel{\text{a.e.}}{=} g \quad \text{اذا كان (1)}$$

$$\int_X f(x) d\mu \leq \int_X g(x) d\mu \quad \text{اگر } f \stackrel{\text{a.e.}}{\leq} g \quad \text{~ ~ (2)}$$

ثلاثون (3)

$$\left| \int_X f(x) d\mu \right| \leq \int_X |f(x)| d\mu$$

اذا كان $c_1 \leq f(x) \leq c_2$ فثلاثون (4)

$$c_1 \mu(X) \leq \int_X f(x) d\mu \leq c_2 \mu(X)$$

اذا كان $X = \sum_{i=1}^n E_i$ فثلاثون (5)

$$\int_X f(x) d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{E_i} f(x) d\mu$$

$$\int_X f(x) d\mu = 0 \quad \text{اگر } f \stackrel{\text{a.e.}}{=} 0 \quad \text{اذا كان (6)}$$

$$\int_X f(x) d\mu \geq 0 \quad \text{اگر } f \stackrel{\text{a.e.}}{\geq} 0 \quad \text{~ ~ (7)}$$

$$f \stackrel{\text{a.e.}}{=} 0 \quad \text{اگر } \int_X f(x) d\mu = 0 \quad \text{اذا كان } f \stackrel{\text{a.e.}}{\geq} 0 \quad \text{~ ~ (8)}$$

دلیل.

این را می توان به روش دیگری نیز اثبات کرد.

مثلاً در

الگوریتم

$$[0, 1] \text{ بر } f \stackrel{\text{a.e.}}{=} 0 \quad \text{اگر } f \stackrel{\text{a.e.}}{\geq} 0$$

$$\int_0^1 f(x) dx = 0 \quad \text{ثلاثون (9)}$$

[0, 1]

(11) إذا كانت $\mu(E) = 0$ فإنه $\int_E f(x) d\mu = 0$

انتهى المحاضرة الأولى

المحاضرة الثانية

الأربعاء 15 / 16 / 2018

تكملة لدرس الدالة لـ μ

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}(x)$$

هو:

$$\int_X f(x) d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$$

تكملة لدرس الدالة لـ μ في صورة المجموعات

مبرهنة:

الدالة $f(x)$ لـ μ تكون مجموعة إذا كانت $f(x) < \infty$ (شرط μ)

مثال:

دالة ديرمليه في صورة مجموعة

بـ μ لـ μ (لا يوجد مجموعة μ بـ μ)

ذكرنا الخواص:

مبرهنة:

إذا كانت f دالة $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تكون μ بـ μ

فإن تكون مجموعة μ لـ μ والتكافؤ μ بـ μ

$$(L) \int_{[a, b]} f(x) d\mu = (R) \int_a^b f(x) dx$$

مبرهنة:

أنه μ بـ μ لـ μ على μ الكالة العامة

بـ μ لـ μ دالة ديرمليه مجموعة μ بـ μ

وغير مجموعة μ بـ μ